

# Mathematische Formulierung des Power Fluctuation Coefficient

## Mathematical formulation of the Power Fluctuation Coefficient

Albers, Axel; DEWI

### Summary

*To evaluate the performance of a wind turbine's control system with respect to the maximisation of the power output and power quality or the minimisation of mechanical loads, simple methods are desirable. For this purpose the Power Fluctuation Coefficient (PFC) was introduced by ECN in 1986 [1]. The DEWI carried out investigations of the PFC based on new measured data [2]. This article presents a theoretical analysis of the PFC recently developed here at DEWI. The PFC is explicitly expressed in terms of the wind turbine's characteristics. Although the theory is not yet confirmed by measured data, qualitative forecasts of the PFC for different types of control systems are successful.*

### 1. Einleitung

Zur Bewertung der Regelgüte von Windkraftanlagen (WKA), etwa im Hinblick auf die Leistungsausbeute, die Netzverträglichkeit oder die Minimierung von mechanischen Belastungen, sind einfache Untersuchungskriterien erstrebenswert. Als ein solches Kriterium wurde 1986 vom ECN der Power Fluctuation Coefficient (PFC) vorgeschlagen [1]. Das DEWI hat jüngst eine meßtechnische Untersuchung des PFC vorgestellt [2]. Dieser Artikel soll daran mit Informationen über erst kürzlich beim DEWI gelungene Vorhersagen des PFC auf rein theoretischer Basis anknüpfen. Die hergeleiteten Formeln können unter Umständen zur Regelung von Windkraftanlagen sehr nützlich sein. Da es sich um eine Erstveröffentlichung handelt, werden zur besseren Nachvollziehbarkeit viele Rechenschritte explizit angegeben.

### 2. Definition des PFC

Der PFC kann als Maß aufgefaßt werden, inwieweit die WKA relative Schwankungen des Leistungsangebotes des Windes auf das elektrische Netz überträgt. Dem entspricht folgende mathematische Definition:

$$\text{PFC} = \frac{\text{relative Schwankung d. elektrischen Leistung}}{\text{relative Schwankung d. Leistung des Windes}} = \frac{\frac{s_{P_{el}}}{P_{el}}}{\frac{s_{P_{Wind}}}{P_{Wind}}}$$

mit  $s_i$  = Schwankung d. Größe i  
 $P_{el}$  = elektrische Leistung  
 $P_{Wind}$  = Leistung des Windes

Nach dieser Definition bedeutet  $\text{PFC} > 1$  bzw.  $\text{PFC} < 1$ , daß relative Schwankungen der elektrischen Leistung größer bzw. kleiner sind als relative Schwankungen der angebotenen Windleistung.  $\text{PFC} = 1$  bedeutet, daß die relativen Schwankungen der Windleistung den relativen Schwankungen der elektrischen Leistung entsprechen. Zur optimalen Leistungsausbeute des Windangebots dürfte der letztgenannte Zustand erstrebenswert sein. Hingegen ist im Sinne guter Netzverträglichkeit insbesondere bei hohen elektrischen Leistungsabgaben etwa im Vollastbereich wünschenswert, wenn Schwankungen der Windleistung möglichst nicht übertragen werden, also der PFC möglichst klein ist.

Um den PFC gemäß der Definition auf meßbare Größen zurückzuführen, muß vorausgesetzt werden, daß die Windleistung

- kubisch mit der Windgeschwindigkeit,
- proportional zur Luftdichte
- und proportional zur Rotorfläche

anwächst.

$$P_{\text{Wind}} = \frac{\rho}{2} A v^3$$

mit  $\rho$  = Luftdichte  
 $A$  = Rotorquerschnittsfläche  
 $v$  = Windgeschwindigkeit

Ferner ist die Schwankung der Windleistung in einer Taylorreihe [3] zu entwickeln, unter den Maßgaben

- inkompressibler Strömung  $\rho \neq \rho(v)$  und,
- daß die Schwankungen der Windgeschwindigkeit so klein sind, daß in der Entwicklung der Schwankung der Windleistung höhere Terme gegen den linearen Term vernachlässigt werden können.

$$s_{P_{\text{Wind/Theo.}}} = \frac{dP_{\text{Wind/Theo.}}}{dv} s_v = \frac{3}{2} \rho A v^2 s_v \quad (1)$$

Einsetzen der Ausdrücke für die Windleistung und ihrer Schwankung in die Definition liefert schließlich

$$\text{PFC} = \frac{\frac{s_{P_e}}{P_{\text{el}}}}{3 \frac{s_v}{v}} \quad (2)$$

Gleichung (2) entspricht genau der in [1] angegebenen Definition des PFC, wenn die Schwankungsgrößen mit den jeweiligen Standardabweichungen und die Beträge mit den Mittelwerten identifiziert werden (vergl. Gleichung (1) in [2]). Der PFC ist somit auf meßbare Größen zurückgeführt. Die Meßgrößen fallen in der Regel bei Leistungsvermessungen an.

### 3. Theoretische Vorhersage des PFC

Um von Gleichung (2) zu einer Vorhersage des PFC zu gelangen, müssen die elektrische Leistung der WKA und ihre Schwankung durch Charakteristika der WKA ausgedrückt werden. Zunächst kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Leistungsbeiwert  $c_p$  derart definiert werden, daß

$$P_{\text{el}} = c_p \frac{\rho}{2} A v^3 \quad (3)$$

ist. Ausgehend von diesem Ausdruck für die elektrische Leistung kann die Schwankung der elektrischen Leistung in einer Taylorreihe entwickelt werden. Es ist in Anlehnung an Gleichung (1) konsistent, wiederum nur bis zum linearen Term zu entwickeln.

$$s_{P_{\text{el}}} = \frac{\rho}{2} A \left( \frac{P_{\text{el}}}{c_p} s_{c_p} + \frac{P_{\text{el}}}{v} s_v \right) = \frac{\rho}{2} A (v^3 s_{c_p} + 3c_p v^2 s_v) \quad (4)$$

Einsetzen der Gleichungen (3) und (4) in (2) liefert

$$\text{PFC} = 1 + \frac{v}{3c_p} \frac{s_{c_p}}{s_v} \quad (5)$$

An dieser Stelle ist die Schwankung des Leistungsbeiwerts  $c_p$  in Bezug zur Schwankung der Windgeschwindigkeit zu bringen. Unter der Voraussetzung:

- daß  $c_p$  nur von der Windgeschwindigkeit abhängt,

erhält man unter Entwicklung der Schwankung des  $c_p$  bis zum linearen Term

$$s_{c_p} = \frac{dc_p}{dv} s_v$$

$$\text{PFC} = 1 + \frac{v}{3c_p} \frac{dc_p}{dv} \quad (6)$$

Diese Gleichung ist fundamental, da sie den PFC allein durch WKA-Parameter und die Windgeschwindigkeit ausdrückt. Offenbar ist unter den gemachten Voraussetzungen  $\text{PFC}=1$  verknüpft mit einer waagerechten Tangente in der  $c_p$ - $v$ -Kennlinie. Ferner kann der PFC bei Kenntnis der  $c_p$ - $v$ -Kennlinie berechnet werden. Der PFC ist größer eins, wenn der Leistungsbeiwert  $c_p$  mit der Windgeschwindigkeit  $v$  anwächst und kleiner eins, sofern  $c_p$  mit wachsender Windgeschwindigkeit abfällt. Im allgemeinen wird der Leistungsbeiwert neben der Windgeschwindigkeit von dem Anströmwinkel der Rotorblätter, der Reynoldszahl, von meteorologischen Bedingungen (z.B. Regen) und von elektrischen und mechanischen Verlusten (Generatorverlust, mechanischer Schlupf usw.) beeinflusst. Ein besseres Verständnis für das Verhalten des PFC in Relation zu Charakteristika der WKA wird erzielt, indem davon ausgegangen wird,

- daß der Anströmwinkel der Rotorblätter den  $c_p$ -Wert maßgeblich beeinflusst.

Der Anströmwinkel wird durch die Schnellaufzahl  $I$  und den Pitchwinkel  $a$  festgelegt.

$$I = \frac{Rw}{v}$$

mit  $w$  = Rotorkreisfrequenz  
 $R$  = Rotorradius

In der Regel werden die Betriebsführungen von WKA derart gestaltet sein, daß der Blattanstellwinkel nur von der Windgeschwindigkeit  $v$  abhängig ist ( $w = w(v)$ ,  $a = a(v)$ ). Unter den gemachten Voraussetzungen ist dann auch der Leistungsbeiwert  $c_p$ -Wert nur von der Windgeschwindigkeit abhängig und Gleichung (6) bleibt gültig. Es folgt:

$$\frac{dc_p(v)}{dv} = \frac{dc_p(I, a)}{dv} = \frac{\partial c_p}{\partial I} \frac{dI}{dv} + \frac{\partial c_p}{\partial a} \frac{da}{dv} = \frac{\partial c_p}{\partial I} R \left( \frac{1}{v} \frac{dw}{dv} - \frac{w}{v^2} \right) + \frac{\partial c_p}{\partial a} \frac{da}{dv}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (6) liefert schließlich

$$\text{PFC} = 1 + \frac{R}{3c_p} \frac{\partial c_p}{\partial I} \left( \frac{dw}{dv} - \frac{w}{v} \right) + \frac{v}{3c_p} \frac{\partial c_p}{\partial a} \frac{da}{dv} \quad (7)$$

Gleichung (7) beschreibt den PFC als Funktion des Leistungsbeiwerts  $c_p$ , der Windgeschwindigkeit, des Drehzahlverhaltens sowie der Pitchregelung. Sie ermöglicht sowohl eine Quantifizierung des PFC bei bekannten Charakteristika der WKA als auch qualitative Aussagen über den Verlauf des PFC mit der Windgeschwindigkeit für verschiedene WKA-Konzepte.

#### 4. Qualitative Vorhersage des PFC

Anhand der hergeleiteten Gl. (7) kann der PFC für verschiedene Betriebsführungen diskutiert werden. Es ist dabei sinnvoll nach Pitchregelung und Stallregelung bzw. fester und variabler Drehzahl zu unterscheiden. Leider würde eine ausführliche Diskussion des qualitativen PFC-Verlaufs den Rahmen dieses Berichts sprengen. Daher sind hier nur einige Ergebnisse zusammengestellt. Detaillierte Informationen sind jedoch bei dem Autor des Beitrages erhältlich.

### 1. Fall: Außerhalb des Pitchregel- und Drehzahlregelbereichs

Für Bereiche der Windgeschwindigkeit, in welchen weder die Drehzahl noch der Pitchwinkel geregelt werden bzw. für drehzahlfeste WKA mit Stallregelung, vereinfacht sich Gl. (7) zu

$$\text{PFC} = 1 - \frac{1}{3c_p} \frac{dc_p}{d\lambda} \quad (8)$$

Der PFC wird durch die Abhängigkeit des Leistungsbeiwerts von der Schnellaufzahl bestimmt. Im Extremum der  $c_p$ - $\lambda$ -Kurve gilt  $\text{PFC}=1$ , und relative Schwankungen der Windleistung verhalten sich wie relative Schwankungen der umgesetzten elektrischen Leistung. Drehzahlfeste, stallgeregelter WKA werden in diesem Zustand mit der Auslegeschnellaufzahl betrieben.  $\text{PFC}>1/\text{PFC}<1$  tritt ein bei negativer/positiver Steigung der  $c_p$ - $\lambda$ -Kurve (vergl. Abb. 1). Relative Schwankungen der Windleistung werden verstärkt/vermindert durch die WKA umgesetzt. Speziell bei drehzahlfesten, stallgeregelter WKA gilt das oberhalb/unterhalb der Auslegeschnellaufzahl, z.B. im Anfahrbereich/Bereich der Leistungsbegrenzung. In [2] Abb.2 sind Messungen des PFC für eine stallgeregelter WKA mit konstanter Rotordrehzahl wiedergegeben. Die Meßergebnisse werden durch die Theorie tendenziell richtig vorhergesagt.

Die beschriebenen Verhältnisse können auch bei aktiver Drehzahlregelung/ Pitchregelung auftreten, sofern kurzzeitige Änderungen der Windgeschwindigkeit nicht zu Veränderungen der Drehzahl/des Pitchwinkels führen.

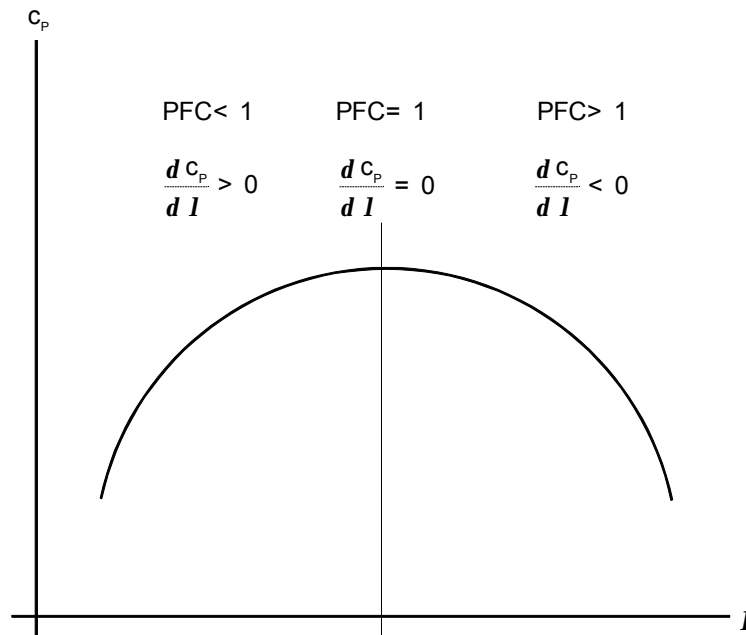


Abb. 1: Im Falle drehzahlfester WKA ohne Pitchregelung bestimmt die  $c_p$ - $\lambda$ -Kurve maßgeblich den PFC.

Fig. 1: In the case of a stall controlled wind turbine with constant rotational speed the PFC is determined by the  $c_p$ - $\lambda$ -curve.

### 2. Fall: Im Drehzahlregelbereich und außerhalb des Pitchregelbereichs

Für drehzahlvariable WKA außerhalb des Windgeschwindigkeitsbereichs mit aktiver Pitchregelung liefert Gl. (7)

$$\text{PFC} = 1 + \frac{R}{3c_p} \frac{dc_p}{d\lambda} \left( \frac{dw}{dv} - \frac{w}{v} \right) \quad (9)$$

Neben der Abhängigkeit des Leistungsbeiwerts  $c_p$  von der Schnellaufzahl  $\lambda$  ist jetzt auch die Drehzahlkennlinie für den PFC-Verlauf maßgebend.

$\text{PFC}=1$  tritt ein:

a) im Extremum der  $c_p$ - $\lambda$ -Kurve:  $\frac{\partial c_p}{\partial \lambda} = 0$  (vergl. Abb. 1),

b) wenn die Tangente an die Drehzahlkurve durch den Koordinatenursprung geht (vgl. Abb. 2). Dann gilt:

$$\frac{dw}{dv} = \frac{w}{v} \quad \Leftrightarrow \quad w = \text{const} \cdot v.$$

Die Drehzahl wächst proportional zur Windgeschwindigkeit bzw.  $\lambda$  ist konstant. Eine konstante Schnellaufzahl führt in Verbindung mit einem festen Pitchwinkel zu einem konstanten Blattanströmwinkel und somit zwangsläufig zu einem konstanten Leistungsbeiwert  $c_p$  bzw. zu  $\text{PFC}=1$ .

Die Theorie führt an dieser Stelle zu der wichtigen Erkenntnis, daß zwar ein optimaler Leistungsbeiwert  $c_p$  zu  $\text{PFC}=1$  führt. Der Umkehrschluß, daß - wie vielerorts angenommen -  $\text{PFC}=1$  notwendigerweise bedeute, die WKA sei für maximale Leistungsausbeute optimal eingestellt, gilt nicht ohne weiteres.

$\text{PFC}>1$  stellt sich in Windgeschwindigkeitsbereichen ein, in welchen eine Windgeschwindigkeits-erhöhung zu einer für die Leistungsausbeute günstigeren Schnellaufzahl (höherer Leistungsbeiwert) führt, z.B. im Anfahrbereich der WKA.

$\text{PFC}<1$  tritt auf bei Windgeschwindigkeiten, in welchen eine Windgeschwindigkeitszunahme zur Entfernung vom Maximum der  $c_p$ - $\lambda$ -Kurve (niedrigerer Leistungsbeiwert) führt, z.B. im Bereich der Leistungsbegrenzung.

### 3. Fall: Im Pitchregelbereich und außerhalb des Drehzahlregelbereichs

Eine fundamentale Aussage läßt sich aus Gl. (7) für pitchgeregelte WKA ableiten, indem zunächst nur der durch die Pitchregelung entstandene Term in Gl. (7) untersucht wird:

$$\frac{v}{3c_p} \frac{\partial c_p}{\partial \lambda} \frac{da}{dv}.$$

Bei den üblichen Betriebsführungen von WKA dient die Pitchverstellung meist der Begrenzung der Rotorleistung auf Nennleistung. Mit zunehmender Windgeschwindigkeit im Vollastbereich wird durch Vergrößerung des Pitchwinkels bzw. Verkleinerung des Blattanströmwinkels eine Abnahme des Leistungsbeiwerts  $c_p$  verursacht, damit die Rotorleistung trotz steigender Windleistung konstant bleibt.

Dann gilt:  $\frac{\partial c_p}{\partial \lambda} < 0$ ,  $\frac{da}{dv} > 0$  und  $\frac{v}{3c_p} \frac{\partial c_p}{\partial \lambda} \frac{da}{dv} < 0$ .

Der durch die Pitchregelung bedingte Term führt im Bereich der Leistungsbegrenzung zu einer Verkleinerung des PFC. Diese Aussage wird durch die in [2: Abb.3] vorgestellten Messungen des PFC einer pitchgeregelten WKA bestätigt. Für den Fall, daß die Pitchregelung nicht nur der Leistungsbegrenzung dient, ist für die Diskussion des PFC Gl. (7) zu betrachten. Für starre Drehzahl folgt:

$$\text{PFC} = 1 - \frac{1}{3c_p} \frac{\partial c_p}{\partial \lambda} + \frac{v}{3c_p} \frac{\partial c_p}{\partial \lambda} \frac{da}{dv}. \quad (10)$$

Folgende Differenzierung ist für die Vorhersage des PFC hilfreich:

- Blattanströmwinkel zu klein für maximalen Leistungsbeiwert
- Blattanströmwinkel zu groß für maximalen Leistungsbeiwert
- Blattanströmwinkel optimal für maximalen Leistungsbeiwert.

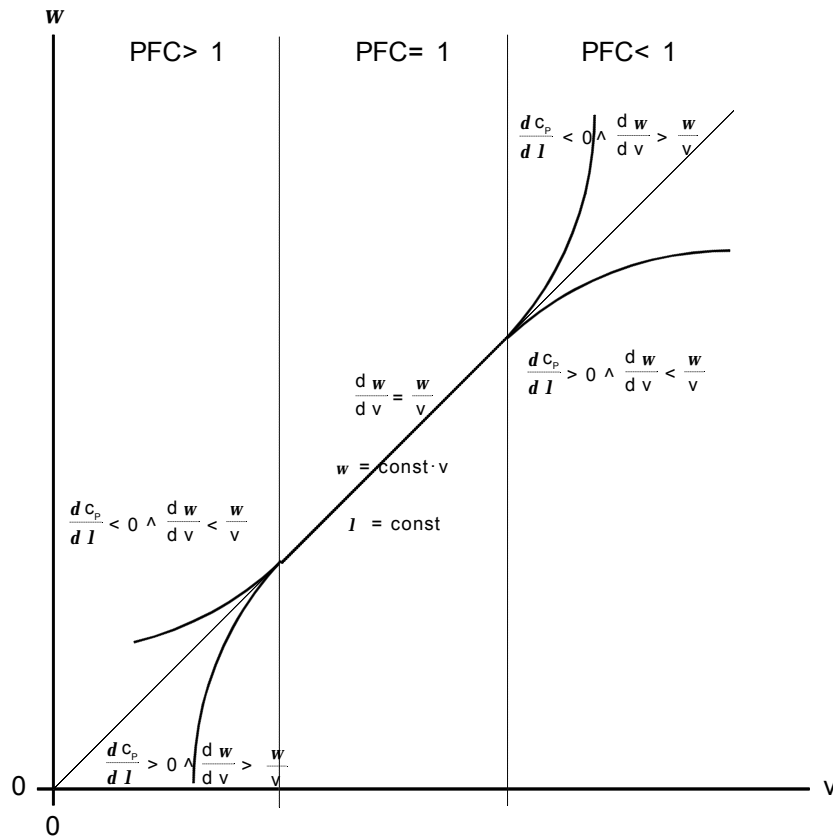


Abb. 2: Bei drehzahlvariablen WKA ohne Pitchregelung hängt der PFC von der Steigung der Drehzahl- und der  $c_p$ - $l$ -Kurve ab. Unterhalb/oberhalb der für maximalen Leistungsbeiwert optimalen Drehzahlgeraden  $w = l(\max. c_p)/R \cdot v = \text{const} \cdot v$  ist die Schnellaufzahl kleiner/grösser als die optimale Schnellaufzahl und es gilt  $\frac{d c_p}{d l} > 0$  bzw.  $\frac{d c_p}{d l} < 0$  (vgl. Abb. 1).

Fig. 2: The PFC of wind turbines with variable rotational speed and without pitch control depends on the slope of the  $w-v$ -curve and the  $c_p-l$ -curve. The rotational speed underneath/above the optimal line for maximal power coefficient  $w = l(\max. c_p)/R \cdot v = \text{const} \cdot v$  is smaller/larger than the optimal rotational speed and hence  $\frac{d c_p}{d l} > 0 / \frac{d c_p}{d l} < 0$  (see fig. 1).

Die Fallunterscheidung führt zu dem Ergebnis, daß der durch die Pitchregelung bedingte Term in Gl. (7) bzw. Gl. (10) positiv/negativ wird, wenn eine Windgeschwindigkeitszunahme zu einer Annäherung/zur Entfernung vom Maximum des Leistungsbeiwerts führt. Dem entsprechen z.B. der Anfahrbereich der WKA bzw. der Bereich der Leistungsbegrenzung. Zur Beurteilung wann PFC=1, PFC>1 oder PFC<1 gilt, müssen die Beträge der einzelnen Terme in Gl. (10) herangezogen werden. PFC=1 ist auf jeden Fall bei extremalem Leistungsbeiwert gegeben. Für weitere Betriebszustände mit PFC=1 kann basierend auf Gl. (10) eine Bedingung für die Pitchregelung in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit hergeleitet werden.

#### 4. Fall: Im Pitchregelbereich und im Drehzahlregelbereich

(Pitchgeregelt, drehzahlvariable WKA)

Ist in einem Windgeschwindigkeitsbereich die Pitchregelung aktiv und wird gleichzeitig die Drehzahl variabel gefahren, so ist für die theoretische Untersuchung des PFC Gl. (7) ohne weitere Vereinfachungen heranzuziehen. Folgende Aussagen können hergeleitet werden:

Die Vorzeichen des durch die Drehzahlregelung bedingten Terms  $\frac{R}{3c_p} \frac{f c_p}{f l} \left( \frac{dw}{dv} - \frac{w}{v} \right)$  und des durch die Pitchregelung bedingten Terms  $\frac{v}{3c_p} \frac{f c_p}{f a} \frac{da}{dv}$  in Gl. (7) hängt davon ab, ob

- die Schnellaufzahl mit steigender Windgeschwindigkeit vergrößert oder verkleinert wird,
- der Blattanströmwinkel größer oder kleiner ist, als für maximalen Leistungsbeiwert  $c_p$  erforderlich,
- der Pitchwinkel mit steigender Windgeschwindigkeit zu oder abnimmt.

Je nach Drehzahlführung und Variation des Pitchwinkels kann  $PFC < 1$ ,  $PFC = 1$  oder  $PFC > 1$  eingestellt werden.  $PFC = 1$  tritt auf jeden Fall bei extremalem Leistungsbeiwert auf. Eine allgemeine Bedingung für  $PFC = 1$  kann aus Gl. (7) hergeleitet werden und stellt die Drehzahl in Abhängigkeit von der Pitchregelung und der Windgeschwindigkeit dar.

## 5. Fazit

Die vorgestellte Theorie führt den PFC zurück auf charakteristische Größen der WKA. Der PFC wird explizit durch die Drehzahl- und Pitchregelung sowie durch den Leistungsbeiwert ausgedrückt. Anhand der hergeleiteten Formeln kann der PFC für verschiedene Betriebsführungskonzepte diskutiert werden. Einige generelle Aussagen lassen sich ableiten; z.B. daß  $PFC = 1$  nicht automatisch bedeutet, daß eine WKA für maximale Leistungsausbeute optimal eingestellt ist. Der Verlauf des PFC mit der Windgeschwindigkeit wird qualitativ für verschiedene WKA-Konzepte richtig wiedergegeben. Allerdings muß die rein theoretisch hergeleitete Gleichung (7) noch experimentell bestätigt werden.

Für die meßtechnische Überprüfung stehen z.B. aus Leistungskurvenvermessungen hinreichend viele Daten zur Verfügung. Sollte die experimentelle Prüfung der Theorie erfolgreich sein, so kann Gl. (7) bei Kenntnis des Drehzahl- und/oder Pitchverhaltens sowie einiger Daten über den Rotor (Leistungsbeiwert in Abhängigkeit des Blattanströmwinkels bzw. Lillenthal-Diagramm) zur qualitativen Vorhersage des PFC dienen. Des weiteren kann dann anhand der vorgestellten Theorie ein gewünschter PFC durch die Betriebsführung definiert eingestellt werden. Die beiden letztgenannten Aspekte könnten schon bei der Konstruktion einer WKA von Bedeutung sein, stellt die Bedingung  $PFC = 1$  doch eine notwendige Bedingung für die maximale Leistungsausbeute dar. Bei bereits errichteten WKA mit Variationsmöglichkeiten in der Betriebsführung könnte die Theorie zur definierten Einstellung der Zustände  $PFC = 1$  zur maximalen Leistungsausbeute oder  $PFC$  nahe Null zwecks bester Netzverträglichkeit im Hinblick auf Leistungsschwankungen oder minimierter mechanischer Belastungen der WKA verwendet werden.

## 6. Literatur

- [1] Stam, W.J.; van der Borg, N.J.C.M.: Fluctuations in the electric power from wind turbines/ Contribution to the Sixth International Meeting of Test Stations for Wind Turbines (IMTS 1986) in Schnittlingen, Germany/ Stichting Energieonderzoek Centrum Nederland SCN-86-132. Petten: ECN, 1986.
- [2] Metzler, Torsten; Söker, Holger.: Untersuchung einer Methode zur Bewertung der Regelgüte von Windkraftanlagen. DEWI-Magazin Nr. 5, S. 56-60 (1994)
- [3] Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig: Teubner; Moskau: Nauka, 1979.